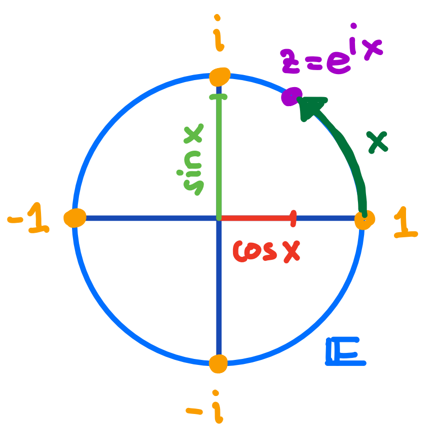
Wiederholung:

Imaginäre Exponentialreihe $(x \in \mathbb{R})$:

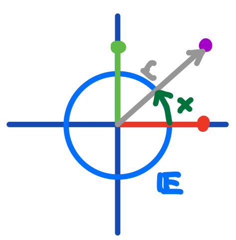
$$\exp(i \cdot x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Summanden} \\ \text{umsortieren}}}{=} \dots = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\cos x} + i \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin x} = e^{ix} \in \mathbb{E}$$



Der Grenzwert e^{ix} liegt auf dem Einheitskreis $\mathbb{E} \subset \mathbb{C}$.

x = Winkel im Bogenmaß

Eulersche Formel: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$



$$\underbrace{z = a + ib}_{\text{„kartesische Form"}} = \underbrace{r e^{ix}}_{\text{„Polarform"}} = r(\cos x + i \sin x)$$

$$= r\cos x + i r \cdot \sin x$$

UMRECHNEN ZWISCHEN BEIDEN DARSTELLUNGEN:

POLAR ⟶ KARTESISCH: Basis ist die Eulersche Formel

$$z = r e^{ix} = \underbrace{r\cos x}_{a = \operatorname{Re} z} + i \underbrace{r \sin x}_{b = \operatorname{Im} z} = a + ib$$

$(r \geq 0, x \in \mathbb{R})$

also $\operatorname{Re} z = r\cos x$, $\operatorname{Im} z = r \sin x$

KARTESISCH $\longrightarrow$ POLAR:

$z = a + ib \overset{?}{=} r \cdot e^{ix}$ mit $r \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$

$(a, b \in \mathbb{R})$

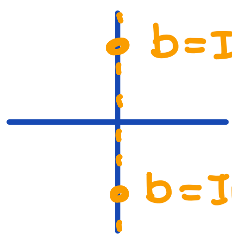
$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Bestimmung eines geeigneten Winkels x (nicht eindeutig!)

$z \neq 0$ (Sollte $z=0$ sein, so ist $r = |z| = 0$, $x \in \mathbb{R}$ beliebig)

Es sei also $z \neq 0$

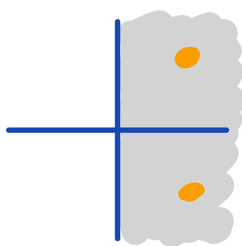
1. $a = \operatorname{Re} z = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$ (d.h. z liegt auf Imaginärachse)



$b = \operatorname{Im} z > 0 \Rightarrow x = 90° = \frac{\pi}{2}$ bzw. $-270° = -\frac{3\pi}{2}$

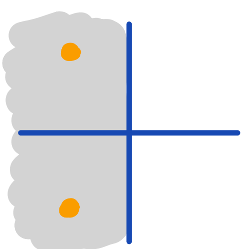
$b = \operatorname{Im} z < 0 \Rightarrow x = -90° = -\frac{\pi}{2}$ bzw. $270° = \frac{3\pi}{2}$

2. $a = \operatorname{Re} z > 0$ (d.h. z liegt in der rechten Halbebene)



$x = \arctan \frac{b}{a} \in (-90°, 90°) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

3. $a = \operatorname{Re} z < 0$ (d.h. z liegt in der linken Halbebene)



$$x = 180° + \arctan \frac{b}{a} \in (90°, 270°)$$
$$= \pi + \arctan \frac{b}{a} \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$$

Auf dem Taschenrechner: $\tan^{-1}$ bedeutet arctan

bedeutet <u>NICHT</u> Kehrwert des Tangens!

$\tan^{-1}$

$\boxed{\tan}$

Tangens-Taste

Auf eingestelltes Winkelmaß achten:

Im Setup des Rechners einstellbar $\longrightarrow$

D, DEG: übliches Gradmaß
„Degree" 0° bis 360°,
$\llcorner = 90°$

R, RAD: Bogenmaß
„Radiant" 0 bis 2π
$\llcorner = \frac{\pi}{2}$

G, GRAD „Neugrad"
„Gon" 0 bis 400
$\llcorner = 100$

Multiplikation von zwei komplexen Zahlen in Polarform:

$$z_1 = r_1 \cdot e^{ix_1} \quad , \; r_1 = |z_1| \geq 0, \; x_1 \in \mathbb{R}$$
$$z_2 = r_2 \, e^{ix_2} \quad , \; r_2 = |z_2| \geq 0, \; x_2 \in \mathbb{R}$$

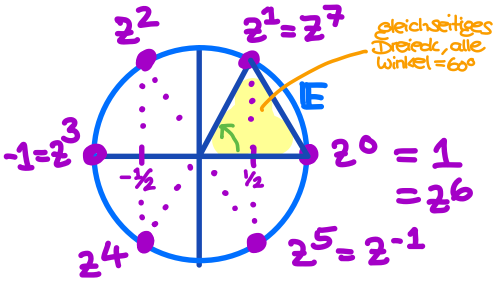
$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 e^{ix_1}) \cdot (r_2 e^{ix_2}) = r_1 r_2 \cdot \underbrace{e^{ix_1} \cdot e^{ix_2}}$$
$$= r_1 r_2 \cdot e^{i(x_1 + x_2)}$$

Multiplikation bedeutet also:

Produkt der Beträge bilden; Winkel addieren („Drehstreckung")

Beim Potenzieren bedeutet dies in entsprechender Weise eine Winkelvervielfältigung:

Beispiel: $z = 1 \cdot e^{i60^\circ} = e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{6}}$



$$
\begin{aligned}
z^0 &= 1 \\
z^1 &= z = e^{i \cdot \frac{2\pi}{6}} \\
z^2 &= (e^{i \cdot \frac{2\pi}{6}})^2 = e^{i \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{6}} = e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} \\
z^3 &= (e^{i \cdot \frac{2\pi}{6}})^3 = e^{i \cdot 3 \cdot \frac{2\pi}{6}} = e^{i\pi} = -1 \\
z^4 &= (e^{i\frac{2\pi}{6}})^4 = e^{i \cdot 4 \cdot 60^\circ} = e^{i \cdot 240^\circ} \\
z^5 &= (e^{i \cdot \frac{2\pi}{6}})^5 = e^{i \cdot 5 \cdot 60^\circ} = e^{i \cdot 300^\circ} \\
z^6 &= (e^{i \cdot \frac{2\pi}{6}})^6 = e^{i \cdot 2\pi} = e^{i \cdot 360^\circ} = 1 \\
z^7 &= z^1 \\
z^8 &= z^2
\end{aligned}
$$

Bem.: $(a^b)^c = a^{bc}$ $\neq$ i.A. $a^{(b^c)}$

Die Potenzen z^k bilden einen 6er-Zyklus; es gilt daher für $z = e^{i \cdot \frac{2\pi}{6}}$

1. $\mathbb{E}$ wird in 6 Segmente gleichmäßig aufgeteilt durch die Potenzen z^k mit $k \in \mathbb{Z}$

2. $z^k = z^{k \bmod 6}$

   Beispiel: $z^{25} = z^{25 \bmod 6} = z^1 = e^{i \cdot \frac{2\pi}{6}}$

Verallgemeinerung für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

Die Zahl $z_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$ besitzt beim Potenzieren einen n-fachen Zyklus: $z_n^k = z_n^{k \bmod n}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Der Einheitskreis wird dabei in n Segmente gleichmäßig aufgeteilt in ganzzahlige Vielfache des Winkels $\frac{2\pi}{n}$.

Def.: n-te EINHEITSWURZELN

Für $z_n := e^{i \cdot \frac{2\pi}{n}}$ bilden die Potenzen z_n^k ($k \in \mathbb{Z}$) die n Lösungen der Gleichung $z^n = 1$, und werden als „n-te Einheitswurzeln" bezeichnet.

Begr.:
$$\left(z_n^k\right)^n = \left(\left(e^{i \cdot \frac{2\pi}{n}}\right)^k\right)^n$$
$$= \left(e^{i \cdot \frac{2\pi \cdot k}{n}}\right)^n = e^{i \cdot \frac{2\pi k \cdot \cancel{n}}{\cancel{n}}}$$
$$= e^{i \cdot 2\pi \cdot k} = (\underbrace{e^{i \cdot 2\pi}}_{=1})^k = 1^k = 1$$

$$\{z_n^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{z_n^k : k = 0, 1, \dots, n-1\}$$

statt $k \in \mathbb{Z}$ reichen die n Werte $0, 1, \dots, n-1$

$$= \{\underbrace{z_n^0}_{1}, \underbrace{z_n^1}_{z_n}, z_n^2, \dots, z_n^{n-1}\}$$

Dies sind n Zahlen, die alle auf dem Einheitskreis $\mathbb{E}$ liegen.

Beispiele:

(i) $z^2 = 1$: Lösungen: 2-te Einheitswurzeln:

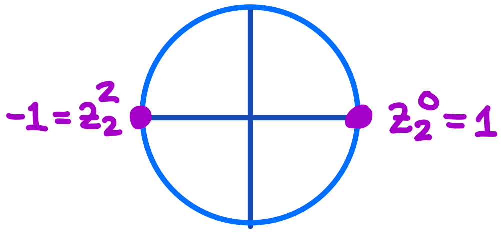
$z_2 = e^{i \cdot \frac{2\pi}{2}}$
$= e^{i \cdot \pi} = -1$

$z_2^0 = (-1)^0 = 1 \quad \in \mathbb{R}$

$z_2^1 = (-1)^1 = -1 \quad \in \mathbb{R}$

$z_2^k = z_2^{k \bmod 2}$

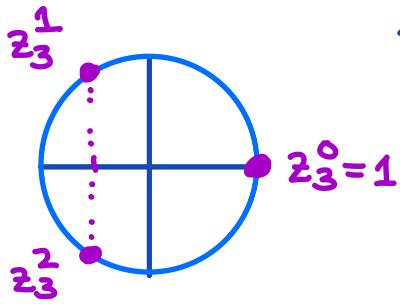
$(-1)^k$ besitzt einen Zweierzyklus.



(ii) $z^3 = 1$: Lösungen: 3-te Einheitswurzeln

$$z_3 = e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} = e^{i \cdot 120°}$$

$$z_3^0 = 1$$
$$z_3^1 = e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} = e^{i \cdot 120°}$$
$$z_3^2 = e^{i \frac{4\pi}{3}} = e^{i \cdot 240°}$$

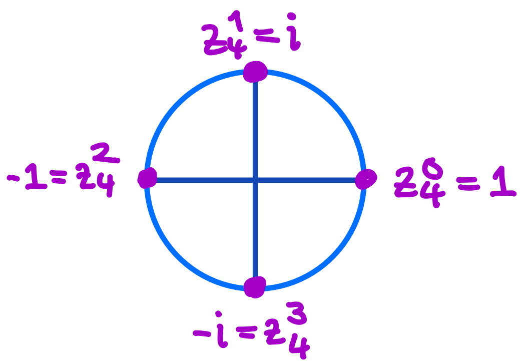


$$z_3^k = z_3^{k \bmod 3}$$ 3er Zyklus

(iii) $z^4 = 1$: Lösungen: 4-te Einheitswurzeln

$$z_4 = e^{i \cdot \frac{2\pi}{4}} = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = e^{i \cdot 90°} = i$$

$$z_4^0 = 1$$
$$z_4^1 = i$$
$$z_4^2 = -1$$
$$z_4^3 = -i$$

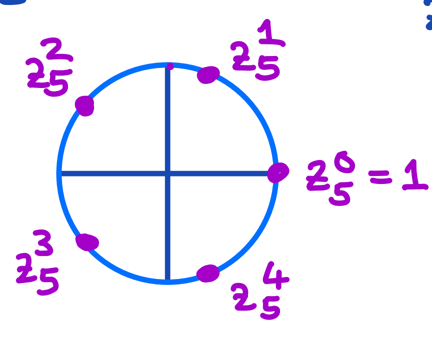


$$z_4^k = z_4^{k \bmod 4}$$ 4er Zyklus

(iv) $z^5 = 1$ Lösungen: 5-te Einheitswurzeln

$$z_5 = e^{i \cdot \frac{2\pi}{5}} = e^{i \cdot 72°}$$

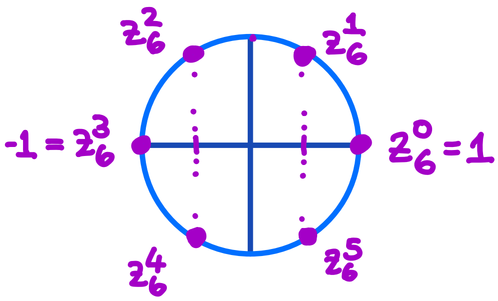
$$z_5^k = e^{i \cdot \frac{2\pi i}{5} \cdot k} \quad , k = 0, 1, 2, 3, 4$$



(v) $z^6 = 1$ Lösungen: 6-te Einheitswurzeln

$z_6 = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\cdot 60°}$

$z_6^k = e^{i\cdot\frac{2\pi}{6}\cdot k}$, $k = 0,1,2,3,4,5$



$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$